Winkel eines Dreiecks:

Gegeben sind die Punkte A, B und C eines Dreiecks. Berechne die Winkel α, β und γ.

Lösungsweg:

α ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

1. $\overrightarrow{AB} = B - A$
2. $\overrightarrow{AC} = C - A$
3. $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

β ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$:

4. $\overrightarrow{BA} = A - B$
5. $\overrightarrow{BC} = C - B$
6. $\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

γ ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$:

7. $\overrightarrow{CA} = A - C$
8. $\overrightarrow{CB} = B - C$
9. $\cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}$

Gerechnetes Beispiel:

$A(-1|1)$, $B(2|7)$ und $C(3|-1)$ bilden ein Dreieck. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks.

Lösung:

Um den Winkel α zu bestimmen, berechnet man zuerst die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+6^2}.\sqrt{4^2+(-2)^2}} = \frac{3.4+6.(-2)}{\sqrt{45}.\sqrt{20}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$$

Um den Winkel β zu bestimmen, berechnet man zuerst die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BA}=A\text{-}B=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}=C\text{-}B=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}}{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}.\sqrt{1^2+(-8)^2}}=\frac{-3.1+(-6).(-8)}{\sqrt{45}.\sqrt{65}}=0{,}832 \Rightarrow \beta=33{,}69°$$

Um den Winkel γ zu bestimmen, berechnet man zuerst die Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$:

$\overrightarrow{CA}=A\text{-}C=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB}=B\text{-}C=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}}{\sqrt{(-4)^2+2^2}.\sqrt{(-1)^2+8^2}}=\frac{(-4).(-1)+2.8}{\sqrt{20}.\sqrt{65}}=0{,}983 \Rightarrow \gamma=56{,}31°$$

Hinweis 1: Da die Winkelsumme eines Dreiecks 180° beträgt, kann man den dritten Winkel berechnen, indem man von 180° die beiden zuerst berechneten Winkel abzieht: $\gamma=180°-\alpha-\beta=180°-90°-33{,}69°=56{,}31°$

Hinweis 2: Um einen Innenwinkel eines Dreiecks oder eines Vierecks berechnen zu können muss man entweder die beiden Richtungsvektoren verwenden die vom entsprechenden Eckpunkt wegzeigen, oder die beiden Vektoren die zum Eckpunkt hinzeigen. Um den Winkel β zu berechnen verwendet man also entweder die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$, oder aber die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CB}$. Mit den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ würde man den Winkel 180°-β als Ergebnis erhalten.