Bruchungleichungen (eine Nennernullstelle)

Die Definitionsmenge ist die Grundmenge ohne die Nullstelle des Nenners.
Man unterscheidet zwei Fälle: Nenner ist positiv oder negativ.

Fall 1: (Nenner positiv)

- D_1: Definitionsmenge von Fall 1 (Zahlenbereich in dem der Nenner positiv ist)
- Man multipliziert die Ungleichung mit dem Nenner (positiv), das Ungleichheitszeichen bleibt gleich
- Lösung der Ungleichung, man erhält die Lösungsmenge L_1^*
- Lösungsmenge Fall 1: $L_1=D_1 \cap L_1^*$

Fall 1: (Nenner negativ)

- D_2: Definitionsmenge von Fall 2 (Zahlenbereich in dem der Nenner negativ ist)
- Man multipliziert die Ungleichung mit dem Nenner (negativ), das Ungleichheitszeichen dreht sich um
- Lösung der Ungleichung, man erhält die Lösungsmenge L_2^*
- Lösungsmenge Fall 1: $L_2=D_2 \cap L_2^*$

Bestimmung der Lösungsmenge der Ungleichung:

$L=L_1 \cup L_2$

Gerechnetes Beispiel:

Gegeben ist die Ungleichung:

$$\frac{4x+1}{x+1} \leq 3$$

Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung.

Lösung:

Definitionsmenge: Die Ungleichung ist überall definiert außer bei den Nennernullstellen. Man bestimmt also die Nullstelle des Nenners.
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$
Definitionsmenge: $D=R/\{-1\}$

Bei der Lösung der Ungleichung werden zwei Fälle unterschieden: Nenner positiv und Nenner negativ.

1. Fall: Nenner positiv: $x>-1$, Definitionsmenge für diesen Fall: $D_1=]-1;\infty[$

$$\frac{4x+1}{x+1} \leq 3 \qquad |.(x+1)$$

$4x+1\leq 3.(x+1)$

$4x+1\leq 3x+3 \qquad |-3x$

$x+1\leq 3 \qquad |-1$

$x\leq 2$

$L_1^*=]-\infty;2]$

Lösungsmenge für den 1.Fall: $L_1=D_1\cap L_1^*=]-1;2]$

2. Fall: Nenner negativ: $x<-1$, Definitionsmenge für diesen Fall: $D_1=]-\infty;-1[$

$$\frac{4x+1}{x+1} \leq 3 \qquad |.(x+1)$$ Ungleichheitszeichen dreht sich um

$4x+1\geq 3.(x+1)$

$4x+1\geq 3x+3 \qquad |-3x$

$x+1\geq 3 \qquad |-1$

$x\geq 2$

Es gibt keine Zahlen, die gleichzeitig kleiner als -1 und größer gleich 2 sind. Die Lösungsmenge für den zweiten Fall ist also die leere Menge $L_2=\{\}$

Lösungsmenge: $L=L_1\cup L_2=]-1;2]\cup\{\}=]-1;2]$

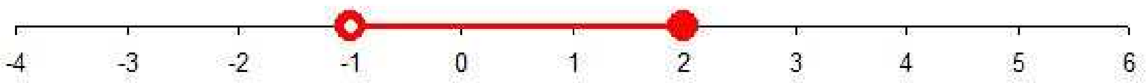
Darstellung der Lösungsmenge in der Intervallschreibweise:

$L=]-1;2]$

Darstellung der Lösungsmenge in der Mengenschreibweise:

$L=\{x\in R|-1<x\leq 2\}$

Darstellung der Lösungsmenge auf dem Zahlenstrahl:



Die Grundmenge für die folgenden Beispiele ist die Menge der reellen Zahlen.

1. Bestimme die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a.) $\frac{x+2}{x-1} > 4$ b.) $\frac{2x+1}{x+4} < 1$

c.) $1 \le \frac{5-x}{x-3}$ d.) $\frac{3x+5}{2x+4} \ge 2$

2. Löse folgende Ungleichungen:

a.) $\frac{2x+3}{x-1} \ge 12$ b.) $\frac{4x+11}{x+1} > 6$

c.) $7 < \frac{x+1}{x-1}$ d.) $\frac{2x+1}{2-x} \le 2$

3. Gesucht sind die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a.) $\frac{x+5}{2-x} < 6$ b.) $\frac{3x-2}{x+4} > -4$

c.) $\frac{4x-2x}{x+1} \ge 3$ d.) $\frac{x+2}{x-2} \le 5$

4. Gesucht sind die Lösungsmengen der gegebenen Ungleichungen:

a.) $\frac{4x+3}{2x+1} \le \frac{5}{2}$ b.) $\frac{3x+2}{1+x} > \frac{3}{2}$

c.) $\frac{x+1}{6+x} \ge \frac{1}{4}$ d.) $\frac{2x+3}{2-x} \le 2$

5. Löse die folgenden Ungleichungen:

a.) $\frac{6x+7}{2x+3} > 3$ b.) $\frac{3x-2}{2x-1} < \frac{3}{2}$

c.) $\frac{x+1}{4-x} \ge -1$ d.) $\frac{4+x}{2+3x} \le \frac{1}{3}$

Lösungen:

1 a.)]1;2[	b.)]-4;3]	c.)]3;4]	d.) [-3;-2[
2 a.)]1;3/2]	b.)]-1;5/2[	c.)]1;4/3[	d.) [3/4;2[
3 a.)]-∞;1[∪]2; ∞[	b.)]-∞;-4[∪]-2; ∞[	c.)]-∞;-1[∪[5; ∞[	d.)]-∞;2[∪[3; ∞[
4 a.)]-∞;-1/2[∪[1/2; ∞[	b.)]-∞;-1[∪]-1/3; ∞[	c.)]-∞;-6[∪[2/3; ∞[	d.)]1/4;2[
5 a.)]-∞;-3/2[	b.)]1/2;∞[	c.)]-∞;-4]	d.)]-∞;-2/3[