Spiegeln eines Punktes an einer Geraden

Gegeben sind ein Punkt *P* und eine Gerade *g*. Der Punkt soll an der Geraden gespiegelt werden. Gesucht ist der gespiegelte Punkt *P'*.

Die Lösung besteht darin, dass man eine Hilfsebene *E*, die normal auf die gegebene Gerade ist und den Punkt *P* enthält, aufstellt und mit *g* schneidet und den Schnittpunkt *S* erhält. Zu *S* wird der Vektor $\overrightarrow{PS}$ addiert, man erhält den gespiegelten Punkt *P'* als Ergebnis.

Lösungsweg Schritt für Schritt:

1. Hilfsebene *E* aufstellen die normal auf *g* ist und den Punkt *P* enthält
2. Schnittpunkt *S* der Geraden *g* und der Hilfsebenen *E* bestimmen
3. $\overrightarrow{PS}=S-P$
4. $P'=S+\overrightarrow{PS}$

Bemerkungen:

- Wird ein Dreieck (oder ein anderes Vieleck) gespiegelt, so wird jeder einzelne Punkt gespiegelt
- Wird eine Gerade gespiegelt, so werden zwei Punkte der Gerade gespiegelt und die gespiegelte Gerade geht durch die beiden gespiegelten Punkte
- Wird eine Ebene gespiegelt, so werden drei Punkte der Ebene gespiegelt und die drei gespiegelten Punkte gehören zur gespiegelten Ebene

Beispiel :

Der Punkt $P=(7|7|-6)$ ist an der Geraden g: $\vec{x}=(8|11|8)+s(2|3|1)$zu spiegeln.

Lösung:

Zuerst bestimmt man eine Ebene ε, die durch *P* geht und normal auf die Gerade *g* ist. Dann schneidet man die Ebene mit der Geraden und erhält einen Schnittpunkt *S*. Um den gespiegelten Punkt *P'* zu erhalten, addiert man zu *S* den Vektor $\overrightarrow{PS}$. Da die Ebene ε normal auf die Gerade ist, nimmt man als Normalvektor der Ebene den Richtungsvektor der Geraden. Man erhält:

$$\vec{n}.\vec{x}=\vec{n}.P$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7\\7\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow 2.x+3.y+1.z=2.7+3.7+1.(-6) \Rightarrow \varepsilon:2x+3y+z=29$$

Aus der Gleichung der Geraden *g* erhält man: $x=8+2t$, $y=11+3t$ und $z=8+t$. Nun setzt man diese Ausdrücke in die Ebenengleichung $2x+3y+z=29$ ein, und erhält:

$2.(8+2t)+3.(11+3t)+8+t$	=	29	
$16+4t+33+9t+8+t$	=	29	
$57+14t$	=	29	$\mid -57$
$14t$	=	-28	$\mid :14$
t	=	-2	

Nun setzte man t=-2 in die Gleichung für die Gerade g ein, und erhält:

$$S=\begin{pmatrix}8\\11\\8\end{pmatrix}+(-2).\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\11\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PS}=S-P=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\7\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\12\end{pmatrix}$$

$$P'=S+\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-2\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\18\end{pmatrix}$$