Spiegeln eines Punktes an einer Geraden

Gegeben sind ein Punkt P und eine Gerade g. Der Punkt soll an der Geraden gespiegelt werden. Gesucht ist der gespiegelte Punkt P'.

Die Lösung besteht darin, dass man eine Hilfsgerade h, die normal auf die gegebene Gerade ist und den Punkt P enthält, aufstellt und mit g schneidet und den Schnittpunkt S erhält. Zu S wird der Vektor $\overrightarrow{PS}$ addiert, man erhält den gespiegelten Punkt P' als Ergebnis.

Lösungsweg Schritt für Schritt:

1. Hilfsgerade h aufstellen die normal auf g ist und den Punkt P enthält
2. Schnittpunkt S der Geraden g und h bestimmen
3. $\overrightarrow{PS} = S - P$
4. $P' = S + \overrightarrow{PS}$

Bemerkungen:

- Wird ein Dreieck (oder ein anderes Vieleck) gespiegelt, so wird jeder einzelne Punkt gespiegelt
- Wird eine Gerade gespiegelt, so werden zwei Punkte der Gerade gespiegelt und die gespiegelte Gerade geht durch die beiden gespiegelten Punkte

Beispiel 1:

Der Punkt $P=(10|4)$ ist an der Geraden $g\colon \vec{x} = (2|3) + s(1|2)$ zu spiegeln.

Lösung:

Zuerst bestimmt man eine Gerade h, die durch P geht und normal auf g ist. Dann schneidet man beide Geraden und erhält einen Schnittpunkt S. Um den gespiegelten Punkt P' zu erhalten, addiert man zu S den Vektor $\overrightarrow{PS}$.
Der Normalvektor zur Geraden g ist $\vec{n} = (2|-1)$. Man erhält:

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen des Schnittpunktes:

Aus der Geraden g erhält man: $x=2+s$ und $y=3+2s$. Aus h folgt: $x=10+2t$ und $y=4-t$. Wenn man sowohl x als auch y gleichsetzt, so erhält man ein Gleichungssystem mit den Unbekannten s und t:

$$\begin{array}{rrcrrl}
2 & +s & = & 10 & +2t & \\
3 & +2s & = & 4 & -t & |.2 \\ \hline
2 & +s & = & 10 & +2t & \\
6 & +4s & = & 8 & -2t & \}+ \\ \hline
8 & +5s & = & 18 & & |-8 \\
 & 5s & = & 10 & & |:5 \\
 & s & = & 2 & &
\end{array}$$

Diesen Wert setzt man in die Gleichung der Geraden *g* ein und erhält:

$$S=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PS}=S\text{-}P=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$$

$$P'=S+\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

Der Punkt P=(9,5|-17) ist an der Geraden g:5x-12y=-2 zu spiegeln.

Lösung:

Zuerst bestimmt man eine Gerade *h*, die durch *P* geht und normal auf *g* ist. Dann schneidet man beide Geraden und erhält einen Schnittpunkt *S*. Um den gespiegelten Punkt *P'* zu erhalten, addiert man zu *S* den Vektor $\overrightarrow{PS}$.

Der Normalvektor zur Geraden *g* ist $\overrightarrow{n_g}$ =(5|-12).

Man erhält als Normalvektor von *h*: $\overrightarrow{n_h}$ =(12|5).

$$\overrightarrow{n_h}\,.\,\vec{x}=\overrightarrow{n_h}\,.P$$

$$\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}9,5\\-17\end{pmatrix}\Rightarrow 12.x+5.y=12.9,5+5.(-17)\Rightarrow 12x+5y=29$$

Bestimmen des Schnittpunktes:

$$\begin{array}{rrcrl}
5x & -12y & = & -2 & |.5\\
12x & +5y & = & 29 & |.12\\
\hline
25x & -60y & = & -10 & \rbrace +\\
144x & +60y & = & 348 & \\
\hline
169x & & = & 338 & |:169\\
x & & = & 2 &
\end{array}$$

Setzt man x=2 in 5x-12y=-2 ein, so erhält man:

$$\begin{array}{rrcrl}
5.2 & -12y & = & -2 & \\
10 & -12y & = & -2 & |-10\\
 & -12y & = & -12 & |:(-12)\\
 & y & = & 1 &
\end{array}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist S=(2|1).

$$\overrightarrow{PS}=S\text{-}P=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9,5\\-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7,5\\18\end{pmatrix}$$

$$P'=S+\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7,5\\18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5,5\\19\end{pmatrix}$$

Übungsbeispiele:

1. Gegeben ist ein Punkt *P*=(5|1) und eine Gerade $g: \vec{x} = (2|2) + s(2|1)$. Der Punkt *P* ist an der Geraden *g* zu spiegeln. Berechne den gespiegelten Punkt *P'*.

2. Der Punkt *P*=(4|4) ist an der Geraden $g: 2x+3y=7$ zu spiegeln. Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes *P'*.

3. Der Punkt *P*=(5|-4) ist an der Geraden die durch die Punkte *A*=(1|2) und *B*=(4|4) geht zu spiegeln.

4. Die Gerade *h* durch die Punkte *P*=(4|0) und *Q*=(2|-1) ist an der Geraden $g: \vec{x} = (1|1) + t(2|1)$ zu spiegeln.

5. Die Gerade *h* durch die Punkte *P*=(12|0) und *Q*=(10|18) ist an der Geraden $g: 5x-4y=19$ zu spiegeln.

6. Gegeben ist ein Dreieck mit den Punkten *A*=(4|0), *B*=(5|2) und *C*=(6|-1). Dieses Dreieck ist an der Geraden $g: \vec{x} = (2|1) + s(1|2)$ zu spiegeln. Gesucht sind die gespiegelten Punkte A', B' und C'.

7. Gegeben ist ein Dreieck mit den Punkten *A*=(0|2), *B*=(1|4) und *C*=(-2|3). Spiegle dieses Dreieck an der Geraden $g: 2x-y=3$. Berechne die Koordinaten des gespiegelten Dreiecks mit den Punkten A', B' und C'.

Lösungen:
1. *P'=(3|5)*
2. *P'=(0|-2)*
3. *P'=(-3|8)*
4. $h': \vec{x} = (0|3) + t(2|1)$
5. $h': x-9y=-70$
6. *A'=(0|2); B'=(1|4); C'=(-2|3)*
7. *A'=(4|0); B'=(5|2); C'=(6|-1)*