Spiegeln eines Punktes an einer Ebene

Gegeben sind ein Punkt *P* und eine Ebene *E*. Der Punkt soll an der Ebene gespiegelt werden. Gesucht ist der gespiegelte Punkt *P'*.

Die Lösung besteht darin, dass man eine Hilfsgerade *h*, die normal auf die gegebene Ebene ist und den Punkt *P* enthält, aufstellt und mit *E* schneidet und den Schnittpunkt *S* erhält. Zu *S* wird der Vektor $\overrightarrow{PS}$ addiert, man erhält den gespiegelten Punkt *P'* als Ergebnis.

Lösungsweg Schritt für Schritt:

1. Hilfsgerade *h* aufstellen die normal auf *E* ist und den Punkt *P* enthält
2. Schnittpunkt *S* der Geraden *h* und der Ebenen *E* bestimmen
3. $\overrightarrow{PS} = S - P$
4. $P' = S + \overrightarrow{PS}$

Bemerkungen:

- Wird ein Dreieck (oder ein anderes Vieleck) gespiegelt, so wird jeder einzelne Punkt gespiegelt
- Wird eine Gerade gespiegelt, so werden zwei Punkte der Gerade gespiegelt und die gespiegelte Gerade geht durch die beiden gespiegelten Punkte
- Wird eine Ebene gespiegelt, so werden drei Punkte der Ebene gespiegelt und die drei gespiegelten Punkte gehören zur gespiegelten Ebene

Beispiel:

Der Punkt $P=(7|6|9)$ ist an der Ebene $\varepsilon: 2x+y+2z=20$ zu spiegeln.

Lösung:

Zuerst bestimmt man eine Gerade *g*, die durch *P* geht und normal auf die Ebene *E* ist. Dann schneidet man die Ebene mit der Geraden und erhält einen Schnittpunkt *S*. Um den gespiegelten Punkt *P'* zu erhalten, addiert man zu *S* den Vektor $\overrightarrow{PS}$. Da die Gerade *g* normal auf die Ebene ist, nimmt man als Richtungsvektor der Geraden den Normalvektor $\vec{n}=(2|1|2)$ der Ebene. Man erhält:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichung der Geraden *g* erhält man: $x=7+2t$, $y=6+t$ und $z=9+2t$. Nun setzt man diese Ausdrücke in die Ebenengleichung $2x+y+2z=20$ ein, und erhält:

$$\begin{array}{lcll} 2.(7+2t) + 6 + t + 2.(9+2t) & = & 20 & \\ 14 + 4t + 6 + t + 18 + 4t & = & 20 & \\ 38 + 9t & = & 20 & |-38 \\ 9t & = & -18 & |:9 \\ t & = & -2 & \end{array}$$

Nun setzte man $t=-2$ in die Gleichung für die Gerade *g* ein, und erhält:

$$S=\begin{pmatrix}7\\6\\9\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\6\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PS}=S-P=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$P'=S+\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$