Schwerpunkt:

Gegeben sind die Punkte A, B und C eines Dreiecks. Gesucht ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

Lösungsweg:

Variante 1: (mit Formel)

$S = \frac{1}{3}(A+B+C)$

Variante 2: (Schnittpunkt der Schwerlinien)

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Schwerlinien s_a, s_b und s_c. Es genügt zwei dieser drei Geraden zu schneiden. (Hier werden s_a und s_b geschnitten)

Bestimmung der Schwerlinien:

Die Schwerlinie s_a geht durch den Punkt *A* und durch den Halbierungspunkt der Seite *a* (=Halbierungspunkt der Punkte *B* und *C*).

1. $H_{BC} = \frac{1}{2}(B+C)$
2. $\overrightarrow{AH_{BC}} = H_{BC} - A$
3. $s_a\colon \vec{x} = A + s.\overrightarrow{AH_{BC}}$

Die Schwerlinie s_b geht durch den Punkt *B* und durch den Halbierungspunkt der Seite *b* (=Halbierungspunkt der Punkte *A* und *C*).

4. $H_{AC} = \frac{1}{2}(A+C)$
5. $\overrightarrow{BH_{BC}} = H_{AC} - B$
6. $s_b\colon \vec{x} = B + t.\overrightarrow{BH_{BC}}$

Berechnung des Schwerpunktes

7. Bestimmung des Schnittpunktes von s_a und s_b

Gerechnetes Beispiel:

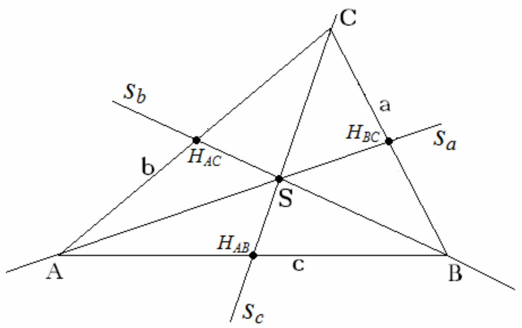
Die Punkte *A*(1|1), *B*(8|2) und *C*(0|6) bilden ein Dreieck. Bestimme den Schwerpunkt auf zwei Arten.

Lösung:

Variante 1:

$S = \frac{1}{3}(A+B+C) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

Variante 2:



Man kann den Schwerpunkt eines Dreiecks bestimmen, indem man die Schwerlinien schneidet.

Bestimmung der Schwerlinien:

Die Schwerlinie s_a geht durch den Punkt *A* und durch den Halbierungspunkt der Seite *a* (=Halbierungspunkt der Punkte *B* und *C*).

$$H_{BC} = \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH_{BC}} = H_{BC} - A = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

Wenn man diesen Vektor durch 3 dividiert, erhält man als Richtungsvektor den Vektor (1|1)

$$s_a\!: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Die Schwerlinie s_b geht durch den Punkt *B* und durch den Halbierungspunkt der Seite *b* (=Halbierungspunkt der Punkte *A* und *C*).

$$H_{AC} = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\7/2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH_{BC}} = H_{AC} - B = \begin{pmatrix}1/2\\7/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15/2\\3/2\end{pmatrix}$$

Wenn man diesen Vektor mit 2/3 multipliziert, erhält man als Richtungsvektor den Vektor (-5|1)

$$s_b\!: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$$

Berechnung des Schwerpunktes durch Bestimmung des Schnittpunktes von s_a und s_b:
Aus der Geraden s_a erhält man: $x=4+s$ und $y=4+s$. Aus s_b folgt: $x=8-5t$ und $y=2+t$. Wenn man sowohl *x* als auch *y* gleichsetzt, so erhält man ein Gleichungssystem mit den Unbekannten *s* und *t*:

$$\begin{array}{rrcrrl}
4 & +s & = & 8 & -5t & \\
4 & +s & = & 2 & +t & |.5 \\
\hline
4 & +s & = & 8 & -5t & \}+ \\
20 & +5s & = & 10 & +5t & \\
\hline
24 & +6s & = & 18 & & |-24 \\
 & 6s & = & -6 & & |:6 \\
 & s & = & -1 & &
\end{array}$$

Diesen Wert setzt man in die Gleichung der Geraden s_a ein und erhält:

$$S = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$