

Schranken

Untere Schranken:

Sind alle Folgenglieder einer gegebenen Folge größer oder gleich einer Zahl U , so nennt man diese Zahl eine untere Schranke der Folge. Jede Zahl die kleiner als eine untere Schranke ist, ist ebenfalls eine untere Schranke.

Gilt für eine Zahl U die Ungleichung $U \leq a_n$ (für alle n), so ist U eine untere Schranke der Folge. Alle Zahlen, die kleiner als eine untere Schranke sind, sind auch untere Schranken.

Obere Schranken:

Sind alle Folgenglieder einer gegebenen Folge kleiner oder gleich einer Zahl O , so nennt man diese Zahl eine obere Schranke der Folge. Jede Zahl die größer als eine obere Schranke ist, ist ebenfalls eine obere Schranke.

Gilt für eine Zahl O die Ungleichung $a_n \leq O$ (für alle n), so ist O eine obere Schranke der Folge.

Beschränkte Folgen:

Eine Folge, die sowohl eine untere als auch eine obere Schranke besitzt nennt man beschränkt. Eine Folge, die eine untere Schranke hat, nennt man nach unten beschränkt. Eine Folge, die eine obere Schranke hat, nennt man nach oben beschränkt.

Beweis, dass eine Zahl eine Schranke ist

Um zu beweisen, dass eine Zahl U eine untere Schranke ist, muss die Ungleichung $U \leq a_n$ gelöst werden. Dass U eine untere Schranke ist, ist bewiesen, wenn man eine wahre Aussage (z.B: $4 > 2$) erhält, oder wenn die Lösungsmenge alle ganzen Zahlen ≥ 1 erhält (z.B: $n > -5$ oder $n \geq 4/7$).

Um zu beweisen, dass eine Zahl O eine obere Schranke ist, muss die Ungleichung $a_n \leq O$ gelöst werden. Dass O eine obere Schranke ist, ist bewiesen, wenn man eine wahre Aussage (z.B: $4 > 2$) erhält, oder wenn die Lösungsmenge alle ganzen Zahlen ≥ 1 erhält (z.B: $n > -5$ oder $n \geq 4/7$).

Beispiel 1:

Zeige, dass die $U=2$ eine untere Schranke der Folge $a_n = \frac{7+3n}{2+n}$ ist.

Lösung:

Um zu zeigen, dass eine Zahl U eine untere Schranke ist, muss die Ungleichung $U \leq a_n$ gelöst werden.

Man setzt $U=2$ und $a_n = \frac{7+3n}{2+n}$ in die Ungleichung $U \leq a_n$ ein:

$$\begin{aligned} 2 &\leq \frac{7+3n}{2+n} && | \cdot (2+n) \\ 2 \cdot (2+n) &\leq 7+3n \\ 4+2n &\leq 7+3n && | -3n-4 \\ -n &\leq 3 && | :(-1) \quad (\text{es dreht sich das Ungleichheitszeichen um}) \\ n &\geq -3 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass 2 eine untere Schranke der gegebenen Folge ist.

Beispiel 2:

Untersuche, ob $O=5$ eine obere Schranke der Folge $a_n = 4 \cdot 0,9^n$ ist.

Lösung:

Um zu zeigen, dass eine Zahl O eine obere Schranke ist, muss die Ungleichung $a_n \leq O$ gelöst werden.

Man setzt $a_n = 4 \cdot 0,9^n$ und $O=5$ in die Ungleichung $a_n \leq O$ ein:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 0,9^n &\leq 5 && | :4 \\ 0,9^n &\leq 1,25 && | \log \\ n \cdot \log 0,9 &\leq \log 1,25 && | : \log 0,9 \quad (\text{da } \log 0,9 \text{ negativ ist, dreht sich das} \\ &&& \text{Ungleichheitszeichen um}) \\ n &\geq \frac{\log 1,25}{\log 0,9} \\ n &\geq -2,12 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass 5 eine obere Schranke der gegebenen Folge ist.

Übungsbeispiele:

1. Ist O eine obere Schranke?

a.) $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$, O=2

b.) $a_n = \frac{5n+4}{n+3}$, O=4

c.) $a_n = \frac{4n-2}{3n+1}$, O=1,5

d.) $a_n = \frac{7n-6}{n+8}$, O=5

2. Zeige, dass O eine obere Schranke ist.

a.) $a_n = \frac{2n+3}{3n+4}$, O=1

b.) $a_n = \frac{4n-3}{5n+3}$, O=0,8

c.) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$, O=2,5

d.) $a_n = \frac{3-n}{n+2}$, O=3/4

3. Zeige, dass U eine untere Schranke ist.

a.) $a_n = \frac{n+7}{2+3n}$, U=1/5

b.) $a_n = \frac{2n}{n+1}$, U=1/2

c.) $a_n = \frac{5n+3}{4n-3}$, U=1

d.) $a_n = \frac{6n+4}{n+1}$, U=4

4. Untersuche, ob U eine untere Schranke der gegebene Folge ist.

a.) $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$, U=1

b.) $a_n = \frac{n-2}{n+3}$, U=-1

c.) $a_n = \frac{n}{n+1}$, U=1

d.) $a_n = \frac{5n+1}{4n-3}$, U=2

5. Ist U eine untere Schranke der gegebenen Folge?

a.) $a_n = 4 - \frac{3}{2^n}$, U=2

b.) $a_n = 8 \cdot 0,5^n$, U=2

c.) $a_n = \frac{0,1^n}{7}$, U=0,01

d.) $a_n = n^2 - 3n + 4$, U=1

6. Ist O eine obere Schranke der gegebenen Folge?

a.) $a_n = 5 - 0,6^n$, O=4,8

b.) $a_n = 3 \cdot 0,2^n - 4$, O=-0,1

c.) $a_n = \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+3}$, O=1

d.) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, O=3/4

Lösungen:

1 a.) ja, b.) nein, c.) ja, d.) nein

4 a.) ja, b.) ja, c.) nein, d.) nein

5 a.) ja, b.) nein, c.) nein, d.) ja

6 a.) nein, b.) nein, c.) ja, d.) ja