Monotonie

Man nennt eine Folge streng monoton steigend (fallend), wenn jedes Folgenglied größer (kleiner) als sein unmittelbarer Vorgänger ist.

Bezeichnung	**Bedingung**
streng monoton steigend	$a_{n+1}>a_n$
monoton steigend	$a_{n+1}\geq a_n$
streng monoton fallend	$a_{n+1}<a_n$
monoton fallend	$a_{n+1}\leq a_n$
keine Monotonie	keine dieser Bedingungen trifft zu

Um eine Monotonie (steigen oder fallend) zu beweisen muss die entsprechende Bedingung (siehe obenstehende Tabelle) bewiesen werden. a_{n+1} erhält man, indem man in der Formel für a_n, jedes *n* durch *(n+1)* ersetzt. Man erhält eine Ungleichung. Die Monotonie ist bewiesen, wenn man eine wahre Aussage (z.B:4>2) erhält, oder wenn die Lösungsmenge alle ganzen Zahlen ≥1 erhält (z.B:n>-5 oder n≥4/7).

Beispiel für die Bestimmung von a_{n+1}:

Ist die Folge $a_n=\frac{2+3n}{5-n}$ gegeben, so erhält man für a_{n+1}:

$$a_{n+1}=\frac{2+3(n+1)}{5-(n+1)}=\frac{2+3n+3}{5-n-1}=\frac{5+3n}{4-n}$$

Beispiel 1:

Zeige, dass die Folge $a_n=\frac{7+3n}{2+n}$ streng monoton fallend ist.

Lösung:

Zuerst bestimmt man a_{n+1}.

Man erhält: $a_{n+1}=\frac{7+3(n+1)}{2+(n+1)}=\frac{7+3n+3}{2+n+1}=\frac{10+3n}{3+n}$

Wenn eine Folge streng monoton fallend ist, so gilt:

$a_{n+1}<a_n$

Man setzt $a_n=\frac{7+3n}{2+n}$ und $a_{n+1}=\frac{10+3n}{3+n}$ in die Ungleichung $a_{n+1}<a_n$ ein:

$$\frac{7+3n}{2+n}<\frac{10+3n}{3+n}$$

Der gemeinsame Nenner ist (2+n).(3+n). Man multipliziert die Ungleichung mit dem gemeinsamen Nenner und erhält:

$(7+3n).(3+n)$	$>$	$(10+3n).(2+n)$	
$21+7n+9n+3n^2$	$>$	$20+10n+6n+3n^2$	
$21+16n+3n^2$	$>$	$20+16n+3n^2$	$\vert -16n-3n^2$
21	$>$	20	

21>20 ist eine wahre Aussage. Daraus folgt, dass die gegebene Folge streng monoton steigend ist.

Beispiel 2:

Untersuche die Folge $a_n = 2^n.(2n+1)$ auf Monotonie.

Lösung:

Zuerst berechnet man die ersten Folgenglieder:

$a_1 = 2^1.(2.1+1) = 2.3 = 6$

$a_2 = 2^2.(2.2+1) = 4.5 = 20$

$a_3 = 2^3.(2.3+1) = 8.7 = 56$

$a_4 = 2^4.(2.4+1) = 16.9 = 144$

$a_5 = 2^5.(2.5+1) = 32.11 = 352$

Da jedes Folgenglied größer als das unmittelbar vorhergehende ist, kann man die Vermutung aufstellen, dass die Folge streng monoton steigend ist. Diese Annahme muss noch bewiesen werden. Bis jetzt ist die Aussage nur für die ersten fünf Folgenglieder bewiesen. Für streng monoton steigende Folgen gilt:
$a_{n+1}>a_n$

Man bestimmt a_{n+1}:
Aus $a_n = 2^n.(2n+1)$ folgt: $a_{n+1} = 2^{n+1}.(2(n+1)+1) = 2^{n+1}.(2n+3)$

a_{n+1}	$>$	a_n		
$2^{n+1}.(2n+3)$	$>$	$2^n.(2n+1)$	$\vert :2^n$	(es gilt: $2^{n+1}=2.2^n$)
$2.(2n+3)$	$>$	$2n+1$		
$4n+6$	$>$	$2n+1$	$\vert -2n-6$	
$2n$	$>$	-5	$\vert :2$	
n	$>$	$-5/2$		

Daraus folgt, dass diese Folge streng monoton steigend ist.

Übungsbeispiele:

1. Zeige, dass die gegebenen Folge streng monoton fallend sind:

a.) $a_n = \frac{n+7}{n+1}$ b.) $a_n = \frac{4-n}{n+2}$ c.) $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$ d.) $a_n = \frac{4-4n}{n+7}$

2. Ist die gegebene Folge streng monoton fallend?

a.) $a_n = \frac{8n-2}{n+5}$ b.) $a_n = \frac{n+5}{3n+1}$ c.) $a_n = \frac{n+1}{5n+3}$ d.) $a_n = \frac{-4}{n+1}$

3. Zeige, dass die gegebene Folge streng monoton steigend ist:

a.) $a_n = \frac{5n-13}{n+1}$ b.) $a_n = \frac{6n-2}{3n+1}$ c.) $a_n = \frac{4n-3}{n+3}$ d.) $a_n = \frac{n-4}{3n-2}$

4. Untersuche, ob die gegebene Folge streng monoton steigend ist:

a.) $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ b.) $a_n = \frac{8n+1}{2n+1}$ c.) $a_n = \frac{4n+19}{4n+1}$ d.) $a_n = \frac{7-2n}{n+1{,}5}$

5. Untersuche die gegebene Folge auf Monotonie:

a.) $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ b.) $a_n = \frac{5n-16}{2n-7}$ c.) $a_n = \frac{n+4}{2n-5}$ d.) $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$

6. Untersuche die gegebene Folge auf Monotonie:

a.) $a_n = 4^n$ b.) $a_n = 2.(-3)^n$ c.) $a_n = 1 - \frac{4^n}{5}$ d.) $a_n = 100.0{,}8^n$

7. Untersuche die gegebene Folge auf Monotonie:

a.) $a_n = 3^n.(1-3n)$ b.) $a_n = 2^n.(5n-1)$ c.) $a_n = (19-3n).4^n$ d.) $a_n = (-1)^n.(3+5n)$

8. Untersuche die gegebene Folge auf Monotonie:

a.) $a_n = \frac{2n+1}{3^n}$ b.) $a_n = \frac{n+1}{0{,}2^n}$ c.) $a_n = \frac{4n-1}{2^n}$ d.) $a_n = \frac{5n-19}{2^n}$

9. Untersuche die gegebene Folge auf Monotonie:

a.) $a_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ b.) $a_n = \frac{n+1}{n^2-8n+17}$ c.) $a_n = \frac{n-5}{n^2+3n+2}$ d.) $a_n = \frac{1-2n}{n^2+4n}$

Lösungen:

2 a.) nein, b.) ja, c.) ja, d.) nein
4 a.) ja, b.) ja, c.) nein, d.) nein
5 a.) streng monoton steigend, b.) keine Monotonie, c.) keine Monotonie, d.) streng monoton fallend
6 a.) streng monoton steigend, b.) keine Monotonie, c.) streng monoton fallend, d.) streng monoton fallend
7 a.) streng monoton fallend, b.) streng monoton steigend, c.) keine Monotonie, d.) keine Monotonie
8 a.) streng monoton fallend, b.) streng monoton steigend, c.) keine Monotonie, d.) keine Monotonie
9 a.) streng monoton fallend, b.) keine Monotonie, c.) keine Monotonie, d.) streng monoton steigend