## Beispiel 116:

**Aufgabenstellung:**

Gegeben sind eine Ebene $\varepsilon$:$ax+2y+2z=14$ und ein Punktes $P$. Bestimme die fehlende Größe der Ebene, so dass $P=(4|7|7)$ den Abstand $d=6$ zur Ebene hat (2 Lösungen).

**Lösung:**

Den Abstand $d$ eines Punktes $P=(x_P|y_P|z_P)$ von einer Ebene $ax+by+cz=e$ kann man mit folgender Formel berechnen:

$$d = \frac{|ax_P + by_P + cz_P - e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Daraus folgt: $d = \frac{|a.4+2.7+2.7-14|}{\sqrt{a^2+2^2+2^2}} = \frac{|4a+14+14-14|}{\sqrt{a^2+4+4}} = \frac{|4a-14|}{\sqrt{a^2+8}}$

Setzt man für $d$ die Zahl 6 ein, so folgt:

| | | |
|---|---|---|
| $6$ | $= \frac{\|4a-14\|}{\sqrt{a^2+8}}$ | $\|.\sqrt{a^2+8}$ |
| $6.\sqrt{a^2+8}$ | $= \|4a-14\|$ | $\|\ ^2$ |
| $36(a^2+8)$ | $= 16a^2-112a+196$ | |
| $36a^2+288$ | $= 16a^2-112a+196$ | $\|-16a^2+112a-196$ |
| $20a^2+112a+92$ | $= 0$ | $\|:4$ |
| $5a^2-28a+23$ | $= 0$ | |

$$a_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{(-28)^2-4.5.23}}{2.5} = \frac{28\pm\sqrt{784-460}}{10} = \frac{28\pm\sqrt{324}}{10} = \frac{28\pm 18}{10}$$

$a_1=(28-18)/10=10/10=1$ $\qquad \varepsilon_1: x+2y+2z=14$

$a_2=(28+18)/10=46/10=4,6$ $\qquad \varepsilon_2: 4,6x+2y+2z=14$

## Beispiel 117:

**Aufgabenstellung:**

Gegeben ist die Ebene $\varepsilon$: $\vec{x}=(-1|2|2)+s(1|1|-1)+t(7|5|2)$. Gesucht ist eine Gerade, die normal auf diese Ebene steht und durch den Punkt $P=(4|5|2)$ geht.

**Lösung:**

Da die gesuchte Gerade normal auf die Ebene $\varepsilon$ sein soll, ist ihr Richtungsvektor ein Normalvektor der Ebene. Diesen Normalvektor erhält man, indem man das vektorielle Produkt (Kreuzprodukt) der beiden Richtungsvektoren der Ebenengleichung bestimmt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2-5.(-1) \\ -(1.2-7.(-1)) \\ 1.5-7.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es folgt für die Geradengleichung:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\-9\\-2\end{pmatrix}$$

## Beispiel 118:

### Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Ebene $\varepsilon$: $4x+5y-z=2$. Gesucht ist eine Gerade, die normal auf diese Ebene steht und durch den Punkt $P=(-4|1|-2)$ geht.

### Lösung:

Da die gesucht Gerade normal auf die Ebene $\varepsilon$ sein soll, ist ihr Richtungsvektor ein Normalvektor der Ebene. Diesen Normalvektor kann man direkt aus der Ebenengleichung ablesen: $\vec{n}=(4|5|-1)$. Es folgt für die Geradengleichung:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}$$

## Beispiel 119:

### Aufgabenstellung:

Berechne den Schnittpunkt der Ebene $\varepsilon$: $\vec{x}=(5|-2|2)+s(1|2|1)+t(2|2|1)$ mit der Geraden $g$: $\vec{x}=(2|1|1)+r(3|-1|2)$.

### Lösung:

Man kann die beiden Gleichungen gleichsetzen und erhält ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten $s$, $t$ und $r$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I: | 5 | $+s$ | $+2t$ | = | 2 | $+3r$ |
| II: | -2 | $+2s$ | $+2t$ | = | 1 | $-r$ |
| III: | 2 | $+s$ | $+t$ | = | 1 | $+2r$ |

Elliminieren von $r$:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I+3.II: | -1 | $+7s$ | $+8t$ | = | 5 | \|.5 |
| 2.II+III: | -2 | $+5s$ | $+5t$ | = | 3 | \|.(-7) |
| | -5 | $+35s$ | $+40t$ | = | 25 | } + |
| | 14 | $-35s$ | $-35t$ | = | -21 | |
| | 9 | | $+5t$ | = | 4 | \|-9 |
| | | | $5t$ | = | -5 | \|:5 |
| | | | $t$ | = | -1 | |

Berechnung von s: $-1+7s+8.(-1)=5 \Rightarrow 7s=14 \Rightarrow s=2$

$s$ und $t$ in die Ebenengleichung eingesetzt ergibt:

$$S=\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$$

## Beispiel 120:

**Aufgabenstellung:**

Gegeben sind die Gerade $g$: $\vec{x}=(1|2|3)+t(2|3|4)$ und die Ebene $\varepsilon$: $x+2y+2z=27$. Gesucht ist der Schnittpunkt von Gerade und Ebene.

**Lösung:**

Aus der Geradengleichung der Geraden $g$ erhält man: $x=1+2t$, $y=2+3t$ und $z=3+4t$. Nun setzt man diese Ausdrücke in die Ebenengleichung $x+2y+2z=27$ ein, und erhält:

$$\begin{array}{lcll}
1+2t+2.(2+3t)+2.(3+4t) & = & 27 & \\
1+2t+4+6t+6+8t & = & 27 & \\
11+16t & = & 27 & |-11 \\
16t & = & 16 & |:16 \\
t & = & 1 &
\end{array}$$

Nun setzt man $t=1$ in die Gleichung für die Gerade $g$ ein, und erhält:

$$S=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+1.\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$$

## Beispiel 121:

**Aufgabenstellung:**

Gesucht ist der Winkel $\alpha$ zwischen der Geraden $g$: $\vec{x}=(5|-2|1)+s(1|4|8)$ und der Ebene $\varepsilon$: $8x+y+4z=5$.

**Lösung:**

Um den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene zu bestimmen, berechnet man zuerst den Winkel $\alpha'$ zwischen den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden und dem Normalvektor $\vec{n}$ der Ebene. Diesen Winkel muss man von 90° abziehen um den gesuchten Winkel $\alpha$ zu erhalten. Der Richtungsvektor der gegebenen Geraden ist $\vec{a}=(1|4|8)$ und der Normalvektor der Ebene ist $\vec{n}=(8|1|4)$.

$$\cos\alpha'=\frac{\vec{a}.\vec{n}}{|\vec{a}|.|\vec{n}|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}.\sqrt{8^2+1^2+4^2}}=\frac{1.8+4.1+8.4}{9.9}=\frac{44}{81}\Rightarrow \alpha'=57{,}10°$$

$\alpha=90°-\alpha'=90°-57{,}10°=32{,}90°$