$$B=H-\frac{a}{2}\frac{\vec{n}_R}{|\vec{n}_R|}=\begin{pmatrix}7/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}-\frac{2\sqrt{3}}{2}\frac{\begin{pmatrix}-3\sqrt{3}/2\\ -3/2\end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix}7/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3/2\\ -\sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Beispiel 157:

Aufgabenstellung:

Die Punkte A=(1|1), B=(8|2) und C=(0|6) bilden ein Dreieck. Bestimme die Gleichungen der Schwerlinien in parameterfreier Form.

Lösung:

Eine Schwerlinie geht durch einen Punkt und durch den Halbierungspunkt der gegenüberliegenden Seite. Berechnung der Halbierungspunkte:

$$H_a=\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$$H_b=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\3{,}5\end{pmatrix}$$

$$H_c=\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$$

Bestimmung von s_a:

$$\overrightarrow{AH_a}=H_a-A=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AH_a}$ ist der Richtungsvektor von s_a. Der (gekürzte) Normalvektor lautet: $\overrightarrow{n_a}$=(1|-1)

$$\overrightarrow{n_a}.\vec{x}=\overrightarrow{n_a}.A$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow 1.x+1.y=1.1+1.(-1)$$

Man erhält: s_a:$x+y=0$

Bestimmung von s_b:

$$\overrightarrow{BH_b}=H_b-B=\begin{pmatrix}0{,}5\\3{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{BH_b}$ ist der Richtungsvektor von s_b. Der (durch 1,5 gekürzte) Normalvektor lautet: $\overrightarrow{n_b}$=(1|5)

$$\overrightarrow{n_b}.\vec{x}=\overrightarrow{n_b}.B$$

$$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\Rightarrow 1.x+5.y=1.8+5.2$$

Man erhält:
s_b:$x+5y=18$

Bestimmung von s_c:

$$\overrightarrow{CH_c}=H_c-C=\begin{pmatrix}4{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4{,}5\\-4{,}5\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{CH_c}$ ist der Richtungsvektor von s_c. Der (durch 4,5 gekürzte) Normalvektor lautet: $\overrightarrow{n_c}$ =(1|1)

$\overrightarrow{n_c}\,.\,\vec{x}=\overrightarrow{n_c}\,.C$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} \Rightarrow 1.x+1.y=1.0+1.6$

Man erhält:

s_c:x+y=6

Beispiel 158:

Aufgabenstellung:

Die Punkte A=(1|1), B=(8|2) und C=(0|6) bilden ein Dreieck. Bestimme den Schwerpunkt auf zwei Arten.

Lösung:

Variante 1:

$S=\frac{1}{3}(A+B+C)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

Variante 2:

Man kann den Schwerpunkt eines Dreiecks bestimmen, indem man die Schwerlinien schneidet.

Bestimmung der Schwerlinien:

Die Schwerlinie s_a geht durch den Punkt A und durch den Halbierungspunkt der Seite a (=Halbierungspunkt der Punkte B und C).

$H_{BC}=\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH_{BC}}=H_{BC}-A=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

Wenn man diesen Vektor durch 3 dividiert, erhält man als Richtungsvektor den Vektor (1|1)

$s_a\!: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Die Schwerlinie s_b geht durch den Punkt B und durch den Halbierungspunkt der Seite b (=Halbierungspunkt der Punkte A und C).

$H_{AC}=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\7/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH_{BC}}=H_{AC}-B=\begin{pmatrix}1/2\\7/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15/2\\3/2\end{pmatrix}$

Wenn man diesen Vektor mit 2/3 multipliziert, erhält man als Richtungsvektor den Vektor (-5|1)

s_b: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung des Schwerpunktes durch Bestimmung des Schnittpunktes von s_a und s_b:
Aus der Geraden s_a erhält man: x=4+s und y=4+s. Aus s_b folgt: x=8-5t und y=2+t. Wenn man sowohl x als auch y gleichsetzt, so erhält man ein Gleichungssystem mit den Unbekannten s und t:

$$\begin{array}{rrcrrl} 4 & +s & = & 8 & -5t & \\ 4 & +s & = & 2 & +t & |.5 \\ \hline 4 & +s & = & 8 & -5t & \multirow{2}{*}{\}+} \\ 20 & +5s & = & 10 & +5t & \\ \hline 24 & +6s & = & 18 & & |-24 \\ & 6s & = & -6 & & |:6 \\ & s & = & -1 & & \end{array}$$

Diesen Wert setzt man in die Gleichung der Geraden s_a ein und erhält:

$S=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} +(-1).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Beispiel 159:

Aufgabenstellung:

Die Punkte A=(-8|3), B=(2|7) und C=(2|-13) bilden ein Dreieck. Bestimme den Höhenschnittpunkt.

Lösung:

Der Höhenschnittpunkt ist der Schnittpunkt der Höhenlinien. Eine Höhenlinie geht durch einen Punkt des Dreiecks und ist normal auf die gegenüberliegende Seite.

Bestimmung der Höhenlinie h_a:

$\overrightarrow{BC} = C\text{-}B = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Richtungsvektor von h_a ist normal auf $\overrightarrow{BC}$. Man erhält den Vektor (1|0)

h_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimmung der Höhenlinie h_b:

$\overrightarrow{AC} = C\text{-}A = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -16 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Richtungsvektor von h_b ist normal auf $\overrightarrow{AC}$. Man erhält den Vektor (8|5)

h_b: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Berechnung des Höhenschnittpunktes durch Bestimmung des Schnittpunktes von h_a und h_b:
Aus der Geraden h_a erhält man: x=-8+s und y=3. Aus h_b folgt: x=2+8t und y=7+5t. Wenn man sowohl x als auch y gleichsetzt, so erhält man ein Gleichungssystem mit den Unbekannten s und t:

$$\begin{array}{rrcrl} -8 & +s & = & 2 & +8t \\ 3 & & = & 7 & +5t \quad \Rightarrow t=-4/5 \end{array}$$

Diesen Wert setzt man in die Gleichung der Geraden h_b ein und erhält:

$$H=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}+(-4/5).\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-32/5\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22/5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4{,}4\\3\end{pmatrix}$$

Beispiel 160:

Aufgabenstellung:

Die Punkte A=(1|-2), B=(4|-4) und C=(6|-1) bilden ein Dreieck. Bestimme den Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

Lösung:

Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Streckensymmetralen der Dreieckspunkte. Eine Streckensymmetrale geht durch den Seitenmittelpunkt und ist auf diese Seite normal.

Bestimmung der Streckensymmetrale s_a:

$$H_{BC}=\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2{,}5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_a, $\overrightarrow{BC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:

$$\vec{n}\,.\,\vec{x}=\vec{n}\,.H_{BC}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\-2{,}5\end{pmatrix}\Rightarrow 2.x+3.y=2.5+3.(-2{,}5)$$

Man erhält: $2x+3y=2{,}5$

Bestimmung der Streckensymmetrale s_b:

$$H_{AC}=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_b, $\overrightarrow{AC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:

$$\vec{n}\,.\,\vec{x}=\vec{n}\,.H_{AC}$$

$$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}\Rightarrow 5.x+1.y=5.3{,}5+1.(-1{,}5)\Rightarrow 5x+y=16$$

Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$\begin{array}{rrcrl} 2x & +3y & = & 2{,}5 & \\ 5x & +y & = & 16 & |.(-3) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrl} 2x & +3y & = & 2,5 & \multirow{2}{*}{\}+} \\ -15x & -3y & = & -48 & \\ \hline -13x & & = & -45,5 & |:(-13) \\ x & & = & 3,5 & \end{array}$$

Setzt man x=3,5 in $2x+3y$=2,5 ein, so erhält man:

$$\begin{array}{rrcrl} 2.3,5 & +3y & = & 2,5 & \\ 7 & +3y & = & 2,5 & |-7 \\ & 3y & = & -4,5 & |:3 \\ & y & = & -1,5 & \end{array}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Umkreismittelpunkt U=(3,5|-1,5).

Beispiel 161:

Aufgabenstellung:

Die Punkte A=(-7|5), B=(1|9) und C=(7|7) bilden ein Dreieck. Bestimme den Umkreismittelpunkt des Dreiecks und den Radius des Umkreises.

Lösung:

Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Streckensymmetralen der Dreieckspunkte. Eine Streckensymmetrale geht durch den Seitenmittelpunkt und ist auf diese Seite normal.

Bestimmung der Streckensymmetrale s_a:

$H_{BC}=\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_a, $\overrightarrow{BC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:

$\vec{n}\,.\,\vec{x}=\vec{n}\,.\,H_{BC}$

$\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} \Rightarrow 6.x+(-2).y=6.4+(-2).8$

Man erhält:

$6x-2y=8$ oder $3x-y=4$

Bestimmung der Streckensymmetrale s_b:

$H_{AC}=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=C-A=\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_b, $\overrightarrow{AC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:

$\vec{n}\,.\,\vec{x}=\vec{n}\,.H_{AC}$

$\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow 14.x+2.y=14.0+2.6$

Man erhält: $14x+2y=12$ oder $7x+y=6$

Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$\left.\begin{array}{rrcr} 3x & -y & = & 4 \\ 7x & +y & = & 6 \end{array}\right\}+$$

$$\begin{array}{rrcrl} 10x & & = & 10 & |:10 \\ x & & = & 1 & \end{array}$$

Setzt man $x=1$ in $7x+y=6$ ein, so erhält man:

$$\begin{array}{rrcrl} 7.1 & +y & = & 6 & \\ 7 & +y & = & 6 & |-7 \\ & y & = & -1 & \end{array}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Umkreismittelpunkt $U=(1|-1)$.

Der Radius des Umkreises ist der Abstand vom Umkreismittelpunkt zu einem der Punkte A, B oder C. Nimmt man den Abstand zu A, so erhält man:

$\overrightarrow{AU}=U-A=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$

$r=\left|\overrightarrow{AU}\right|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$

Beispiel 162:

Aufgabenstellung:

Die Punkte $A=(1|2)$, $B=(7|2)$ und $C=(4|8)$ bilden ein Dreieck. Bestimme den Schwerpunkt, den Höhenschnittpunkt und dem Umkreismittelpunkt.

Lösung:

Schwerpunkt:

$S=\frac{1}{3}(A+B+C)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

Höhenschnittpunkt:

Der Höhenschnittpunkt ist der Schnittpunkt der Höhenlinien. Eine Höhenlinie geht durch einen Punkt des Dreiecks und ist normal auf die gegenüberliegende Seite.

Bestimmung der Höhenlinie h_a:

$\overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Richtungsvektor von h_a ist normal auf $\overrightarrow{BC}$. Man erhält den Vektor (2|1)

h_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Bestimmung der Höhenlinie h_b:

$\overrightarrow{AC}=C-A=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Richtungsvektor von h_b ist normal auf $\overrightarrow{AC}$. Man erhält den Vektor (2|-1)

$h_b: \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Berechnung des Höhenschnittpunktes durch Bestimmung des Schnittpunktes von h_a und h_b: Aus der Geraden h_a erhält man: $x=1+2s$ und $y=2+s$. Aus h_b folgt: $x=7+2t$ und $y=2-t$. Wenn man sowohl x als auch y gleichsetzt, so erhält man ein Gleichungssystem mit den Unbekannten s und t:

$$\begin{array}{rrcrrl}
1 & +2s & = & 7 & +2t & \\
2 & +s & = & 2 & -t & |.2 \\
\hline
1 & +2s & = & 7 & +2t & \multirow{2}{*}{$\}+$} \\
4 & +2s & = & 4 & -2t & \\
\hline
5 & +4s & = & 11 & & |-5 \\
 & 4s & = & 6 & & |:4 \\
 & s & = & 1,5 & &
\end{array}$$

Diesen Wert setzt man in die Gleichung der Geraden h_a ein und erhält:

$H=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+1,5.\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3,5\end{pmatrix}$

Umkreismittelpunkt:

Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Streckensymmetralen der Dreieckspunkte. Eine Streckensymmetrale geht durch den Seitenmittelpunkt und ist auf diese Seite normal.

Bestimmung der Streckensymmetrale s_a:

$H_{BC}=\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5,5\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_a, $\overrightarrow{BC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:

$\vec{n}.\vec{x}=\vec{n}.H_{BC}$

$\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5,5\\5\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $(-3).x+6.y=(-3).5,5+6.5$

Man erhält: $-3x+6y=13,5$ oder $-2x+4y=9$

Bestimmung der Streckensymmetrale s_b:

$H_{AC}=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,5\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=C-A=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_b, $\overrightarrow{AC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:

$\vec{n}\,.\,\vec{x}=\vec{n}\,.H_{AC}$

$\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\5\end{pmatrix} \Rightarrow 3.x+6.y=3.2{,}5+6.5$

Man erhält: $3x+6y=37{,}5$ oder $2x+4y=25$

Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$\left.\begin{array}{rrcr} -2x & +4y & = & 9 \\ 2x & +4y & = & 25 \end{array}\right\}+$$
$$\begin{array}{rrcrl} & 8y & = & 34 & |:8 \\ & y & = & 4{,}25 & \end{array}$$

Setzt man $y=4{,}25$ in $-2x+4y=9$ ein, so erhält man:

$$\begin{array}{rrcrl} -2x & +4.4{,}25 & = & 9 & \\ -2x & +17 & = & 9 & |-17 \\ -2x & & = & -8 & |:(-2) \\ x & & = & 4 & \end{array}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Umkreismittelpunkt $U=(4|4{,}25)$.

Beispiel 163:

Aufgabenstellung:

Die Punkte $A=(10|8)$, $B=(1|-1)$ und $C=(19|-10)$ bilden ein Dreieck. Bestimme die Euler'sche Gerade (Die Euler'sche Gerade geht durch den Schwerpunkt, den Höhenschnittpunkt und den Umkreismittelpunkt).

Lösung:

Um die Euler'sche Gerade zu bestimmen, benötigt man zwei Punkte, zum Beispiel den Schwerpunkt und den Höhenschnittpunkt. Der dritte Punkt liegt automatisch auf dieser Geraden.

Schwerpunkt:

$S=\frac{1}{3}(A+B+C)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}19\\-10\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}30\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix}$

Höhenschnittpunkt:

Der Höhenschnittpunkt ist der Schnittpunkt der Höhenlinien. Eine Höhenlinie geht durch einen Punkt des Dreiecks und ist normal auf die gegenüberliegende Seite.

Bestimmung der Höhenlinie h_a:

$\overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}19\\-10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\-9\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Richtungsvektor von h_a ist normal auf $\overrightarrow{BC}$. Man erhält den Vektor (1|2)

$h_a\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$