Kreisgleichung aufstellen

Gegeben ist ein Kreispunkt P. Außerdem ist bekannt, dass der Kreis beide Achsen berührt. Gesucht ist die Gleichung des Kreises.

Der Mittelpunkt liegt im selben Quadranten wie der gegebene Punkt P. Damit der Kreis beide Koordinatenachsen berührt muss der Mittelpunkt auf einer der beiden Meridianen liegen, das heißt, die Beträge beider Koordinaten des Mittelpunktes sind gleich. Diese Aufgabenstellung führt zu einer quadratischen Gleichung und hat zwei Lösungen.

Vorgangsweise:

1. Der Punkt $P(x_P|y_P)$ ist gegeben.
   Falls x_P positiv ist, wählt man $x_M=r$
   Falls x_P negativ ist, wählt man $x_M=-r$
   Falls y_P positiv ist, wählt man $y_M=r$
   Falls y_P negativ ist, wählt man $y_M=-r$
2. Die im Punkt 1 gefundenen Werte für x_M und y_M werden in die Kreisgleichung $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$ eingesetzt.
3. Die Koordinaten x_P und y_P werden in die Kreisgleichung für x und y eingesetzt.
   Man löst die Klammern auf, vereinfacht den Ausdruck und erhält eine quadratische Gleichung für den Radius r.
4. Man löst die quadratische Gleichung und erhält zwei Lösungen r_1 und r_2. Das sind die Radien der beiden Lösungskreise. Man ermittelt nun mit Hilfe der unter Punkt 1 gefundenen Ausdrücke die Koordinaten x_M und y_M des Mittelpunktes.

Demonstrationsbeispiel:

Ein Kreis der beide Koordinatenachen berührt geht durch den Punkt $P(8|9)$. Gesucht sind der Mittelpunkt und der Radius dieses Kreises.

Lösung:

Da der Punkt P im ersten Quadranten liegt, muss auch der Mittelpunkt des gesuchten Kreises im ersten Quadranten liegen. Beide Koordinaten x_M und y_M müssen gleich dem Radius sein, also $x_M = y_M = r$.
Man erhält: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$.

Nun setzt man die Koordinaten des Punktes P für x und y ein und erhält:

$(8-r)^2+(9-r)^2=r^2$

Es folgt: $64-16r+r^2+81-18r+r^2=r^2$
Man erhält folgende quadratische Gleichung: $r^2-34r+145=0$
Die Lösungen sind $r_1=5$ und $r_2=29$

Erste Lösung: $M(5|5)$, $r=5$
Zweite Lösung: $M(29|29)$, $r=29$