Kreisgleichung aufstellen

Gegeben sind drei Punkte, die auf einem Kreis liegen. Gesucht ist die Gleichung des Kreises.

Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses Beispiel zu lösen: Entweder man setzt die Koordinaten der Punkte in die Gleichung $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$ ein und erhält somit drei Gleichungen mit drei Unbekannten oder man betrachtet die Punkte als Dreieckspunkte und berechnet den Umkreis des Dreiecks.

Vorgangsweise: (Variante 1)

1. Die Koordinaten der Kreispunkte in die Gleichung $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$ einsetzen. Man erhält drei Gleichungen mit den drei Unbekannten x_M, y_M und r
2. Die Klammern auflösen
3. Durch zweimalige Subtraktion von je zwei Gleichungen erhält man zwei Gleichungen mit den Unbekannten x_M und y_M.
4. Den Radius r erhält man indem man x_M und y_M in eine der drei Gleichungen einsetzt.

Vorgangsweise: (Variante 2)

1. Der Kreis, der die drei gegebenen Punkte enthält ist der Umkreis des Dreieckes das die gegebenen Punkte bilden.

Bemerkung:

Wenn die gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen, dann ist das Beispiel unlösbar.

Demonstrationsbeispiel:

Auf einem Kreis liegen die Punkte $A(8|9)$, $B(7|2)$ und $C(4|1)$. Gesucht ist die Gleichung des Kreises in Koordinatenform.

Lösung: (Variante 1)

Man setzt den Punkt $A(8|9)$ in die Gleichung $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$ ein (x=8 und y=9) und erhält:

$(8-x_M)^2+(9-y_M)^2=r^2 \rightarrow \quad 64-16x_M+x_M^2+81-18y_M+y_M^2=r^2$

Weiters werden die Punkte B und C in die Kreisgleichung eingesetzt:

$(7-x_M)^2+(2-y_M)^2=r^2 \rightarrow \quad 49-14x_M+x_M^2+4-4y_M+y_M^2=r^2$
$(4-x_M)^2+(1-y_M)^2=r^2 \rightarrow \quad 16-8x_M+x_M^2+1-2y_M+y_M^2=r^2$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit (-1) und addiert sie zur ersten (bzw man subtrahiert die zweite Gleichung von der ersten), so erhält man:

$15-2x_M+77-14y_M=0 \rightarrow 2x_M+14y_M=92$

Multipliziert man die dritte Gleichung mit (-1) und addiert sie zur zweiten (bzw man subtrahiert die dritte Gleichung von der zweiten), so erhält man:
$33-6x_M+3-2y_M=0 \rightarrow 6x_M+2y_M=36$

Lösen dieses Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ll} 2x_M+14y_M=92 & |\cdot(-3) \\ 6x_M+2y_M=36 & \\ \hline -6x_M-42y_M=-276 & \\ 6x_M+2y_M=36 & \end{array} \Big\} + \rightarrow -40y_M=-240 \rightarrow y_M=6$$

Setzt man $y_M=6$ in $2x_M+14y_M=92$ ein, dann erhält man $x_M=4$
Der Mittelpunkt ist $M(4|6)$. Für den Radius gilt: $r=|\overrightarrow{AM}|$.

$$\overrightarrow{AM}=M-A=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-8\\6-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$$

$$r=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

Kreisgleichung: $(x-4)^2+(y-6)^2=25$