Kreisgleichung aufstellen

Von einem Kreis sind zwei Punkte und eine Koordinate des Mittelpunktes gegeben. Gesucht ist die zweite Koordinate des Mittelpunktes.

Der Mittelpunkt eines Kreises liegt auf der Streckensymmetrale zweier beliebiger Kreispunkte. Man stellt zuerst die Gleichung der Streckensymmetrale auf und berechnet dann die gesuchte Koordinate indem man die gegebene Koordinate in diese Gleichung einsetzt.

Vorgangsweise:

1. Berechnung der Streckensymmetrale der gegebenen Punkte P und Q:
   - Berechnung des Halbierungspunktes $H=(P+Q)/2$
   - Berechnung des Richtungsvektors: $\overrightarrow{PQ}=Q-P$
   - Der Richtungsvektor ist der Normalvektor der Streckensymmetrale: $\vec{n}=\overrightarrow{PQ}$
   - Mit Hilfe der Normalvektorform $\vec{n}.\vec{x}=\vec{n}.H$ wird die Gleichung der Streckensymmetrale berechnet
2. Gegebene Koordinate des Mittelpunktes in die Gleichung der Streckensymmetrale einsetzen und damit die zweite Koordinate berechnen.
3. Der Abstand des Mittelpunktes zu einem der gegebenen Punkte ist der Radius

Demonstrationsbeispiel:

Gesucht ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt die x-Koordinate $x_M=2$ hat und der die Punkte $P(6|-2)$ und $Q(4|0)$ enthält.

Lösung:

Berechnung der Streckensymmetralen:

$$H=\frac{1}{2}(P+Q)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}.\vec{x}=\vec{n}.H \rightarrow \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} \rightarrow -2x+2y=-12$$

Die x-Koordinate $x_M=2$ wird in $-2x+2y=-12$ eingesetzt: $-4+2y=-12$

Man erhält y=-4, also M(2|-4)
Der Radius ist der Betrag von $\overrightarrow{MP}$ (oder von $\overrightarrow{MQ}$)

$\overrightarrow{MP} = P - M = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

M(2|-4); r=$\sqrt{20}$ → $(x-2)^2+(y+4)^2=20$