Inkreismittelpunkt

Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen des Dreiecks.

Winkelsymmetrale w_α:

Die Winkelsymmetrale w_α geht durch den Punkt A und halbiert den Winkel α. Den Richtungsvektor dieser Geraden bestimmt man mit der Formel $\overrightarrow{w_\alpha} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0}$.

1. $\overrightarrow{AB} = B - A$
2. $\overrightarrow{AC} = C - A$
3. $|\overrightarrow{AB}|$
4. $|\overrightarrow{AC}|$
5. $\overrightarrow{w_\alpha} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0}$
6. $w_\alpha : \vec{x} = \mathrm{A} + s\,\overrightarrow{w_\alpha}$

Winkelsymmetrale w_β:

Die Winkelsymmetrale w_β geht durch den Punkt B und halbiert den Winkel β. Den Richtungsvektor dieser Geraden bestimmt man mit der Formel $\overrightarrow{w_\beta} = \overrightarrow{BA_0} + \overrightarrow{BC_0}$.

7. $\overrightarrow{BA} = A - B$
8. $\overrightarrow{BC} = C - B$
9. $|\overrightarrow{BA}|$
10. $|\overrightarrow{BC}|$
11. $\overrightarrow{w_\beta} = \overrightarrow{BA_0} + \overrightarrow{BC_0}$
12. $w_\beta : \vec{x} = \mathrm{B} + t\,\overrightarrow{w_\beta}$

Der Inkreismittelpunkt I ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen w_α und w_β.

13. Schnittpunkt von w_α und w_β

Gerechnetes Beispiel:

Die Punkte A=(3|2), B=(7|5) und C=(7|-1) bilden ein Dreieck. Bestimme den Inkreismittelpunkt des Dreiecks.

Lösung:

Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen des Dreiecks.

Winkelsymmetrale w_α:

Die Winkelsymmetrale w_α geht durch den Punkt A und halbiert den Winkel α. Den Richtungsvektor dieser Geraden bestimmt man mit der Formel $\overrightarrow{w_\alpha} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$

$$\overrightarrow{w_\alpha} = \overrightarrow{AB}_0 + \overrightarrow{AC}_0 = \frac{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}{5} + \frac{\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix}8/5\\0\end{pmatrix}$$

Diesen Vektor kürzt man durch 8/5 und erhält (1|0) als Richtungsvektor der Winkelsymmetralen:

$$w_\alpha : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Winkelsymmetrale w_β:

Die Winkelsymmetrale w_β geht durch den Punkt *B* und halbiert den Winkel β. Den Richtungsvektor dieser Geraden bestimmt man mit der Formel $\overrightarrow{w_\beta} = \overrightarrow{BA}_0 + \overrightarrow{BC}_0$.

$\overrightarrow{BA} = A - B = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2+(-6)^2} = 6$

$$\overrightarrow{w_\beta} = \overrightarrow{BA}_0 + \overrightarrow{BC}_0 = \frac{\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}}{5} + \frac{\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix}-4/5\\-8/5\end{pmatrix}$$

Diesen Vektor multipliziert man mit -5/4 und erhält (1|2) als Richtungsvektor der Winkelsymmetralen:

$$w_\beta : \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von w_α und w_β:

Aus der Geraden w_α erhält man: $x=3+s$ und $y=2$. Aus w_β folgt: $x=7+t$ und $y=5+2t$. Wenn man sowohl *x* als auch *y* gleichsetzt, so erhält man ein Gleichungssystem mit den Un-bekannten *s* und *t*:

$$\begin{array}{lll} 3+s & = & 7+t \\ 2 & = & 5+2t \end{array}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\begin{array}{llll} 2 & = & 5+2t & |-5 \\ -3 & = & 2t & |:2 \\ -1,5 & = & t & \end{array}$$

Diesen Wert setzt man in die Gleichung der Geraden w_β ein und erhält:

$$I = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} + (-1,5).\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1,5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5,5\\2\end{pmatrix}$$