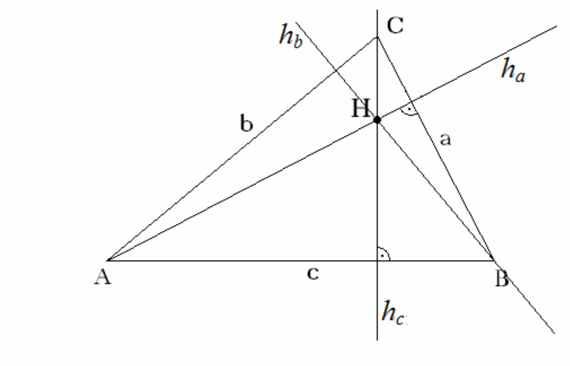
Höhenschnittpunkt:



Gegeben sind die Punkte A, B und C eines Dreiecks. Gesucht ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

Lösungsweg:

Der Höhenschnittpunkt ist der Schnittpunkt der Höhenlinien. Eine Höhenlinie geht durch einen Punkt des Dreiecks und ist normal auf die gegenüberliegende Seite.

Bestimmung der Höhenlinie h_a:

1. $\overrightarrow{BC} = C\text{-}B$
2. Bestimmung des Normalvektors $\vec{n}_{BC}$ (Normalvektor von $\overrightarrow{BC}$)
3. h_a: $\vec{x} = A + s.\vec{n}_{BC}$

Bestimmung der Höhenlinie h_b:

4. $\overrightarrow{AC} = C\text{-}A$
5. Bestimmung des Normalvektors $\vec{n}_{AC}$ (Normalvektor von $\overrightarrow{AC}$)
6. h_b: $\vec{x} = B + t.\overrightarrow{AC}$

Berechnung des Höhenschnittpunktes

7. Bestimmung des Schnittpunktes von h_a und h_b

Gerechnetes Beispiel:

Die Punkte $A(-8|3)$, $B(2|7)$ und $C(2|-13)$ bilden ein Dreieck. Bestimme den Höhenschnittpunkt.

Lösung:

Der Höhenschnittpunkt ist der Schnittpunkt der Höhenlinien. Eine Höhenlinie geht durch einen Punkt des Dreiecks und ist normal auf die gegenüberliegende Seite.

Bestimmung der Höhenlinie h_a:

$\overrightarrow{BC} = C\text{-}B = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Richtungsvektor von h_a ist normal auf $\overrightarrow{BC}$. Man erhält den Vektor (1|0)

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Höhenlinie h_b:

$\overrightarrow{AC} = C\text{-}A = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -16 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Richtungsvektor von h_b ist normal auf $\overrightarrow{AC}$. Man erhält den Vektor (8|5)

h_b: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Berechnung des Höhenschnittpunktes durch Bestimmung des Schnittpunktes von h_a und h_b: Aus der Geraden h_a erhält man: x=-8+s und y=3. Aus h_b folgt: x=2+8t und y=7+5t. Wenn man sowohl x als auch y gleichsetzt, so erhält man ein Gleichungssystem mit den Unbekannten s und t:

$$\begin{array}{rrcrl} -8 & +s & = & 2 & +8t \\ 3 & & = & 7 & +5t \quad \Rightarrow t=-4/5 \end{array}$$

Diesen Wert setzt man in die Gleichung der Geraden h_b ein und erhält:

$H = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + (-4/5).\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32/5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22/5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,4 \\ 3 \end{pmatrix}$